MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE (MHS)

1r Batx

Rodrigo Alcaraz de la Osa. Traducció: Òscar Colomar (@ocolomar)

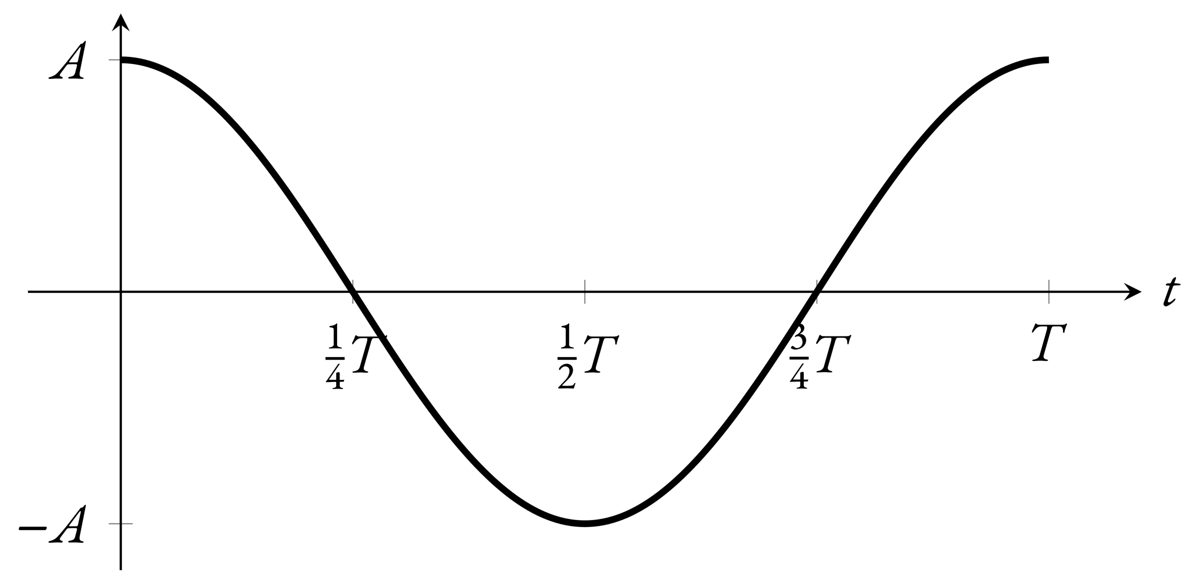
El **moviment harmònic simple** (MHS) és un tipus especial de **moviment periòdic** en el qual la **força restauradora** (elàstica) sobre l'objecte en moviment és **directament proporcional** a la magnitud del **desplaçament** de l'objecte i actua cap a la seva posició d'equilibri. El resultat és una **oscil·lació** que continua indefinidament tret que sigui inhibida per fricció o qualsevol altra dissipació d'energia. Pot considerar-se la **projecció unidimensional** del **moviment circular uniforme** (MCU). EXEMPLES: massa unida a una molla, pèndul simple o el *jou escocès*.

Magnituds

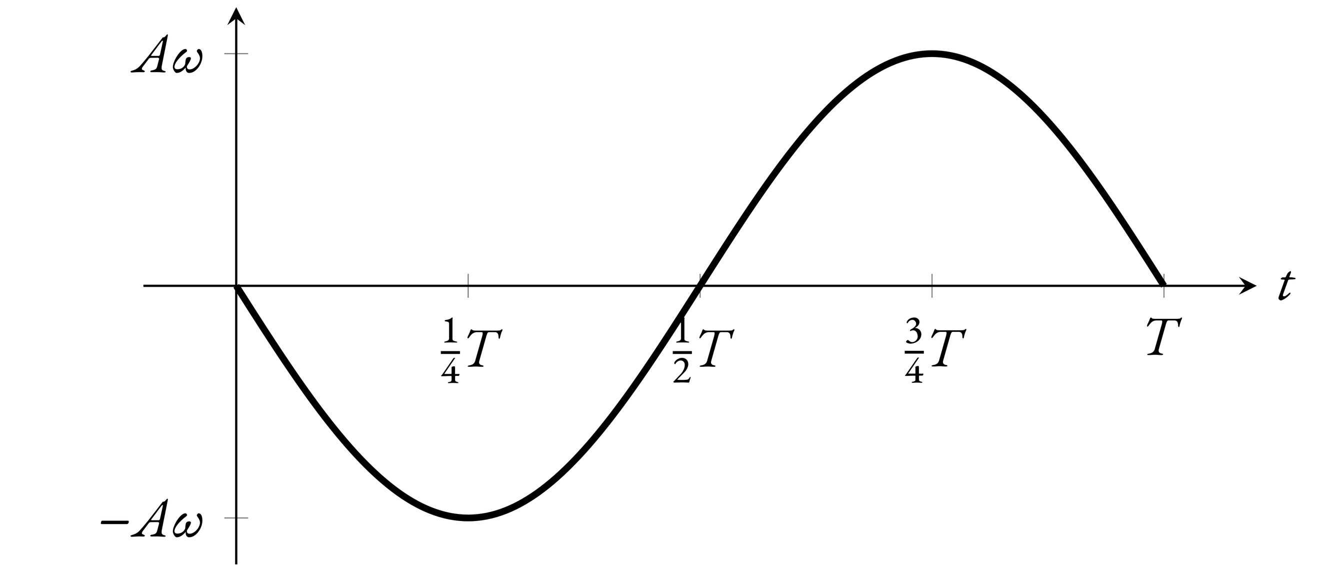
Amplitud, A Màxima elongació (desplaçament màxim de la posició d'equilibri). [m]
Període, T Temps emprat a completar una oscil·lació completa. [s]
Freqüència, f Nombre d'oscil·lacions per unitat de temps: $f = 1/T$. [Hz]
Freqüència angular $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. [rad/s]
Fase inicial Indica l'estat d'oscil·lació/vibració inicial. Es representa amb φ_0. [rad]

Equacions

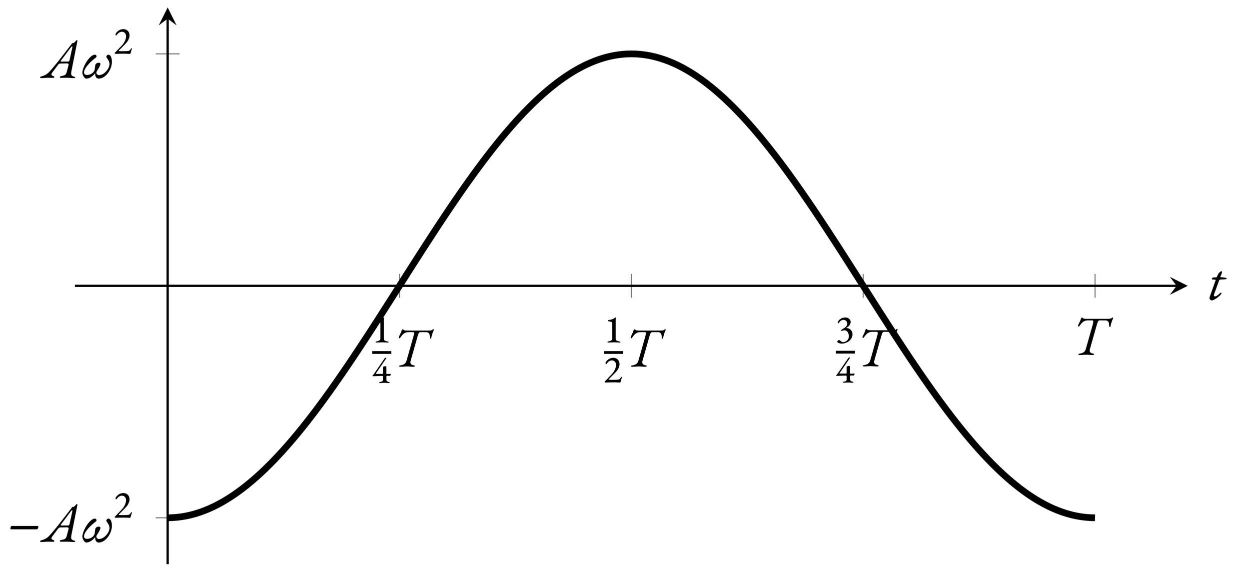
$$\text{POSICIÓ}: x(t) = A\sin(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\text{fase } \varphi})$$



$$\text{VELOCITAT}: v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega\sqrt{A^2 - x^2(t)}$$



$$\text{ACCELERACIÓ}: a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$



Dinàmica del MHS

Llei de Hooke

Aplicant la 2a llei de Newton a una massa m unida a un extrem d'una molla (ressort) de constant elàstica k (obviem el caràcter vectorial en ocórrer tot en una única dimensió):

$$F = ma$$

$$-kx = ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

la solució del qual pot escriure's de la forma:

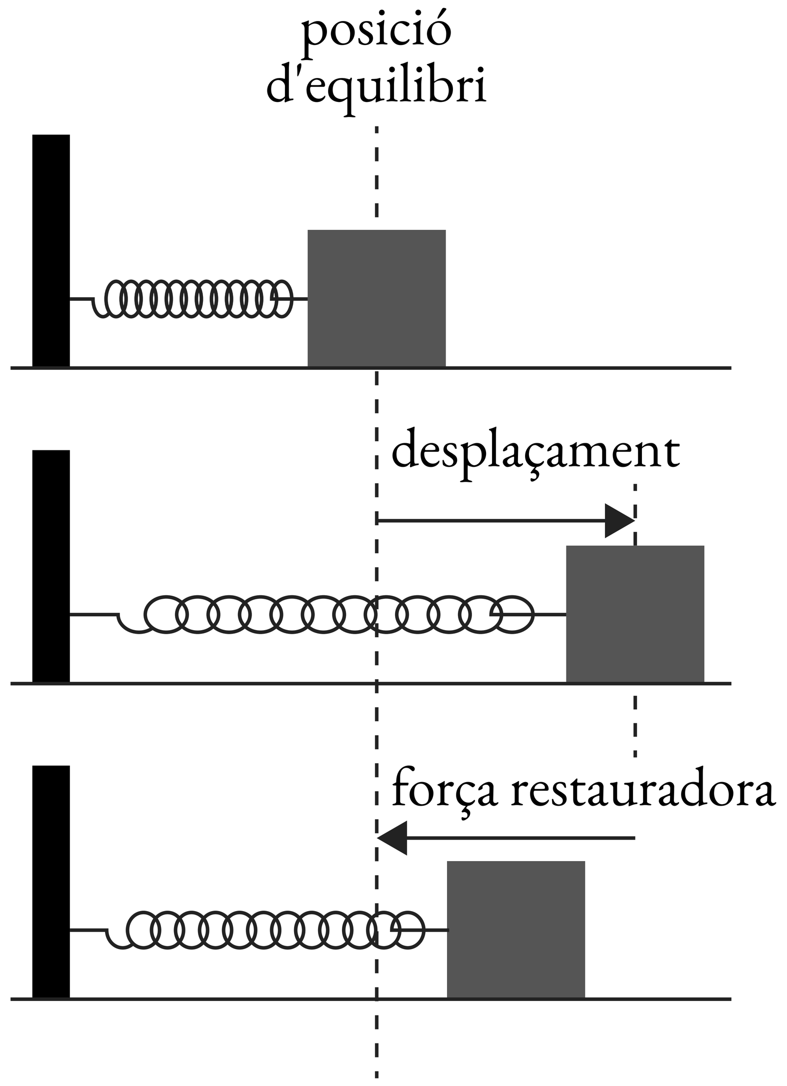
$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

on

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

és la freqüència angular. El període, T, o la freqüència, f, amb la qual oscil·la una massa m unida a un extrem d'un ressort de constant elàstica k poden, per tant, escriure's com:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



Traduïda i adaptada de https://www.chegg.com/learn/physics/introduction-to-physics/harmonic-motion.

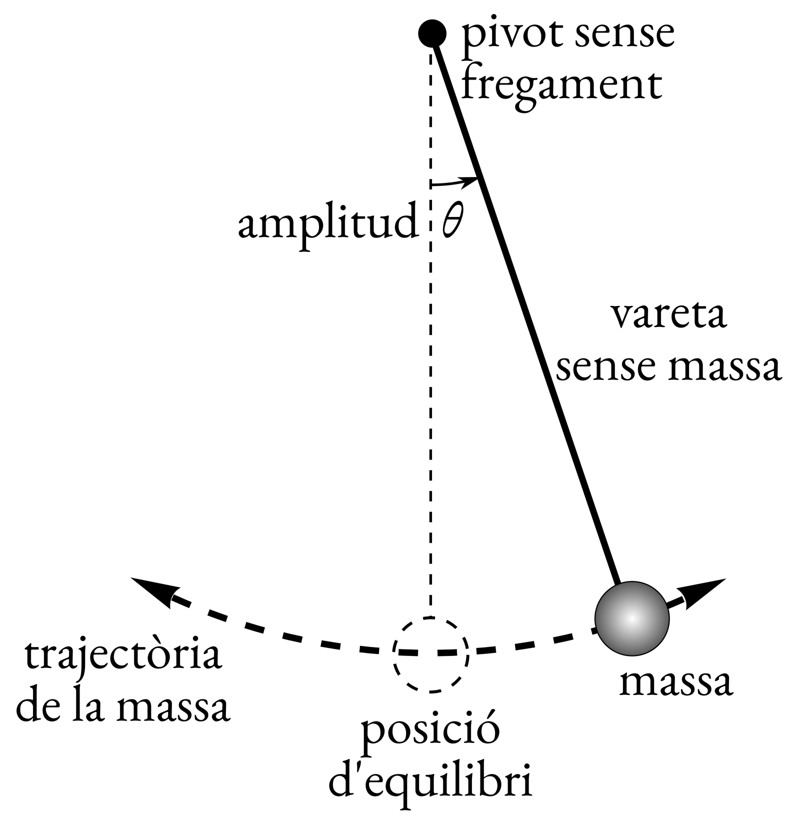
Pèndol simple

Consisteix en una massa suspesa d'un pivot de manera que pot oscil·lar lliurement. En aquest cas la GRAVETAT actua com a FORÇA RECUPERADORA, accelerant la massa cap a la seva posició d'equilibri, provocant l'oscil·lació al voltant d'ella.

L'EQUACIÓ DIFERENCIAL que representa el moviment d'un PÈNDUL SIMPLE és:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

- Al fer una APROXIMACIÓ per ANGLES PETITS, el moviment d'un pèndol simple s'aproxima per un MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE, mitjançant l'equació diferencial:
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
- El temps que triga la massa a completar una oscil·lació completa és el PERÍODE, que únicament depèn de la longitud del pèndol i de l'acceleració de la gravetat, a través de l'expressió:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
- Sense l'aproximació per a angles petits, el període d'un pèndol simple també depèn lleugerament de l'amplitud de l'oscil·lació.



Traduïda i adaptada de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_gravity_pendulum.svg.

Energia del MHS

Energia potencial elàstica

Com la FORÇA ELÀSTICA és CONSERVATIVA, definim l'energia potencial associada:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$$

Substituint l'expressió de la posició, $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Energia cinètica

L'energia cinètica ve donada per l'expressió:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

Substituint l'expressió de la velocitat, $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Energia mecànica

En absència de fregament i altres pèrdues d'energia, l'energia mecànica total és constant:

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$